内江师范学院第一届数学专业竞赛试题（B）参考答案

1. （15 分）已知入射光线路径为l：$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$，求此光线经过平面$\pi$：$x+2y+5z+17=0$反射后胡反射线方程。

解　直线l的参数方程为

$$x=1+4t, y=1+3t, z=2+t$$

代入π的方程得$t=-2$，直线l与π的交点坐标为$(-7,-5,0)$，过该点与平面π垂直的直线方程l_1的方程为$\frac{x+7}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{5}$，过点$(1,1,2)$垂直于直线$l_1$的平面为$\pi_1$：

$$(x-1)+2(y-1)+5(z-2)=0$$

直线l_1与平面π_1交点坐标为$(-6,-3,5)$，设$Q(x,y,z)$是点$(1,1,2)$关于l_1的对称点，由中点公式得

$$\frac{x+1}{2}=-6, \frac{y+1}{2}=-3, \frac{z+2}{2}=5$$

则Q点胡坐标为$(-13,-7,8)$，则反射线方程为过点$(-7,-5,0)$和$(-13,-7,8)$的直线方程，由两点式方程得

$$\frac{x+7}{6}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{-8}$$

2、(10 分)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\frac{1}{\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2+\sin x}}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\sqrt{2}}{8}。$$

3、（10 分）试确定常数 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}1+\ln(1-2x), & x\le 0,\\ a+be^{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，并求出此时的 $f'(x)$.

解：要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，必有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=1$，得 $a+b=1$，即当 $a+b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

由导数定义及 $a+b=1$，有

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+\ln(1-2x)-1}{x}=-2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a+be^{x}-(a+b)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{b(e^{x}-1)}{x}=b,$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f'_-(0)=f'_+(0)$，得 $b=-2$，

于是 $a=3$，且有 $f'(0)=-2,$

故
$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{1-2x}, & x\le 0,\\ -2e^{x}, & x>0.\end{cases}$$

4、（15 分）证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，其中 $x_1=1$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right)$，$n=1,2,\cdots$，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明：由 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right)\ge\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n\cdot\dfrac{3}{x_n}}=\sqrt{3}$

可知 $\{x_n\}$ 有下界，又 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3}{{x_n}^2}\right)\le\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{3}{3})=1$，

所以 $\{x_n\}$ 单调递减，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$ 存在。在 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right)$ 两端取极限，

得 $b=\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{3}{b}\right)$，解得 $b=\sqrt{3}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$。

5、（15 分）设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$。

证明：由极限定义知，$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in N$，当 $n > N_1$ 时，有 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$，

故当 $n > N_1$ 时有

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na}{n}\right|$$

$$\le \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a|}{n} + \frac{|a_{N_1+1} - a| + |a_{N_2+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}$$

$$\le \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a|}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

记 $|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a| = c$ 为一常数，因此 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{c}{n} = 0.$

故 $\exists N_2 \in N$，当 $n > N_2$ 时有 $\frac{c}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| \le \frac{c}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即证得 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$

6. （10 分） 按照第一列展开可得

$$D_n = -D_{n-2}$$

故其特征方程为 $x^2 + 1 = 0$. 该特征方程的两根为 $x_1 = i, x_2 = -i$，

因此

$D_n = i^n k_1 + (-i)^n k_2$.

令 n=1, n=2，便可得到 $D_n = \frac{1}{2}(i^n - (-i)^n)$

7. （10 分）证明：若取 $g(x) = p!\,f(x) = x^p + px^{p-1} + \ldots + \frac{p!}{2}x^2 + p!x + p!$

取素数 *p*，则由E*isenstein* 判别法，*g*(*x*)在 *Q* 上不可约，因此 *f*(*x*)在 *Q* 上不可约.

8. （15 分） 该线性方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

经过初等变换可化为

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故该系数矩阵的秩为 3.

(2) 该方程组的增广矩阵为

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&a_1\\0&0&1&1&a_2\\1&0&1&0&b_1\\0&1&0&1&b_2\end{pmatrix},$$

经过初等变换可以化为

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&a_1\\0&-1&1&0&b_1-a_1\\0&0&1&1&a_2\\0&0&0&0&b_1+b_2-a_1-a_2\end{pmatrix}$$

又方程组有解的充分必要条件是 $r(\mathrm{A})=\mathrm{r}(\bar{\mathrm{A}})=3$

因此$b_1+b_2-a_1-a_2=0$.